Marius Perianu
Ioan Balica

Matematică

Clasa a VII-a

I

art
educațional

Cuprins

Algebră

Geometrie

Algebră

I

Numere reale

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect

Pătrat perfect. Un număr natural a se numește *pătrat perfect* dacă există un număr natural n astfel încât $n^2 = a$.
Rădăcina pătrată. Fie a un număr natural pătrat perfect. Numărul natural n cu proprietatea $n^2 = a$ se numește *rădăcina pătrată* a numărului a și se notează $n = \sqrt{a}$.

Exemple: $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{100} = 10$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{n^2} = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Observație. Dacă n este un număr natural nenul, pătrat perfect, atunci există două numere distincte al căror pătrat este n, și anume $\sqrt{n}$ și $-\sqrt{n}$. Evident, numai unul dintre ele este număr natural. De aceea, dacă $a \in \mathbb{Z}$, atunci $\sqrt{a^2} = |a|$.

Exemple: **1** $\sqrt{(-6)^2} = \sqrt{36} = 6 = |-6|$. **2** $\sqrt{16a^2b^4} = \sqrt{(4ab^2)^2} = |4ab^2| = 4b^2|a|$.

Exersare

1 Completați următorul tabel, știind că x este număr natural:

x	2	5		8			11		25
x^2			9		36	49		144	

2 Dintre următoarele numere, alegeți-le pe cele care sunt pătrate perfecte:
8, 16, 26, 49, 91, 121, 150, 196, 200, 324.

3 **a** Scrieți pătratele perfecte de două cifre.
b Scrieți pătratele perfecte cuprinse între 300 și 500.

4 Determinați numerele întregi care au pătratul egal cu:
a 16; **b** 81; **c** 144; **d** 576; **e** 2025.

5 Descompuneți în factori primi numerele următoare și arătați că sunt pătrate perfecte:
a 9; **b** 36; **c** 64; **d** 121; **e** 400;
f $3^2 \cdot 16$; **g** $25 \cdot 81 \cdot 7^2$; **h** $4^5 \cdot 4^4$; **i** $25^3 \cdot 7^{10}$; **j** $121 \cdot 49^3$.

6 Dintre propozițiile de mai jos, menționați-le pe cele adevărate:
a $\sqrt{64} = 8$; **b** $\sqrt{100^2} = 100$; **c** $\sqrt{(-5)^2} = -5$; **d** $\sqrt{81} = 9$;
e $\sqrt{5^2} = 5$; **f** $\sqrt{(-7)^2} = 7$; **g** $\sqrt{(-3)^2} = -3$; **h** $\sqrt{16} = \sqrt{4}$.

7 Efectuați calculele:

a $\sqrt{7^2}$; **b** $\sqrt{9^2}$; **c** $\sqrt{15^2}$; **d** $\sqrt{20^2}$;

e $\sqrt{(-10)^2}$; **f** $\sqrt{(-16)^2}$; **g** $\sqrt{(-30)^2}$; **h** $\sqrt{(-45)^2}$.

8 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8$; **b** $a = 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16$;

c $a = 9^2 + 12^2$; **d** $a = 7^2 + 24^2$.

9 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect:

a $a = 1 + 2 + 3 + ... + 49$; **b** $a = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 31$;

c $a = 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 2\,011$; **d** $a = (2 + 4 + 6 + 8 + ... + 2\,012) + 1\,007$;

e $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 24) + 25$; **f** $a = (3 + 6 + 9 + 12 + ... + 147) + 1\,225$.

10 Calculați a și apoi arătați că este pătrat perfect, după care aflați $\sqrt{a}$:

a $a = (1 + 2 + 3 + ... + 50) - 25 \cdot 2$; **b** $a = 1 + 2 + 3 + ... + 120 + 4 \cdot 121$;

c $a = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + ... + 225) - 225^2$; **d** $a = 3 \cdot (1 + 3 + 5 + ... + 99) - 5\,000$;

e $a = (60 \cdot 4 + 60^2) + (64^2 - 64 \cdot 43)$; **f** $a = 101^2 - 2 \cdot 99 \cdot 101 + 99^2$.

11 Dați trei exemple de numere naturale care sunt atât pătrate perfecte, cât și cuburi perfecte.

12 Calculați:

a $\sqrt{4} + \sqrt{9} + \sqrt{16}$; **b** $\sqrt{1} + \sqrt{25} - \sqrt{0}$; **c** $\sqrt{36} + \sqrt{64}$; **d** $\sqrt{100} - \sqrt{49}$.

Consolidare

13 Calculați, apoi verificați rezultatele folosind minicalculatorul:

a $\sqrt{169}$; **b** $\sqrt{196}$; **c** $\sqrt{289}$; **d** $\sqrt{361}$;

e $\sqrt{441}$; **f** $\sqrt{529}$; **g** $\sqrt{676}$; **h** $\sqrt{729}$.

14 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, punând în evidență faptul că sunt situate între pătratele a două numere naturale consecutive:

a 8; **b** 12; **c** 24; **d** 95; **e** 250; **f** 500.

15 Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, următoarele numere nu sunt pătrate perfecte,

a $a = 5n + 13$; **b** $b = 10n + 8$; **c** $c = 10n + 12$; **d** $d = 5n + 18$.

Rezolvare: **a.** Ultima cifră a lui $5n$ este 0 sau 5, deci ultima cifră a lui a poate fi 3 sau 8. Cum ultima cifră a unui pătrat perfect este 0, 1, 4, 5, 6 sau 9, rezultă că a nu este pătrat perfect.

16 Arătați că următoarele numere nu sunt pătrate perfecte, unde $m \in \mathbb{N}$:

a $a = 1^m + 5$; **b** $a = 5^m + 7$; **c** $a = 6^m + 6$;

d $a = 10^m + 13$; **e** $a = 15^m + 18$; **f** $a = 31^m + 31$.

17 Arătați că numărul $N = \sqrt{5^{2n+1} \cdot 9^{n+1} + 25^n \cdot 3^{2n+2} \cdot 11}$ este natural, oricare ar fi numărul natural n.

18 Arătați că numerele următoare nu sunt pătrate perfecte:

a $a = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6$; **b** $b = 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{153}$;

c $c = 2 \cdot (3^0 + 3^1 + 3^2 + ... + 3^{17})$; **d** $d = 2 \cdot (3 + 3^2 + 3^3 + ... + 3^{83})$.

19 Calculați:

a $\sqrt{2^4}$; b $\sqrt{3^4}$; c $\sqrt{11^6}$; d $\sqrt{23^8}$;

e $\sqrt{31^8}$; f $\sqrt{6^{14}}$; g $\sqrt{11^{22}}$; h $\sqrt{59^{12}}$;

i $\sqrt{5^{28}}$; j $\sqrt{9^{24}}$; k $\sqrt{20^{20}}$; l $\sqrt{12^{44}}$.

20 Calculați:

a $\sqrt{3^4\cdot5^6}$; b $\sqrt{2^2\cdot3^4\cdot7^6}$; c $\sqrt{5^{10}\cdot7^{20}}$; d $\sqrt{3^{14}\cdot7^4\cdot17^8}$;

e $\sqrt{2^8\cdot7^2}$; f $\sqrt{2^{10}\cdot5^{20}\cdot11^{30}}$; g $\sqrt{3^{52}\cdot11^{40}}$; h $\sqrt{9^{10}\cdot11^{12}\cdot13^{14}}$.

Rezolvare: f. $\sqrt{2^{10}\cdot5^{20}\cdot11^{30}}=\sqrt{(2^5)^2\cdot(5^{10})^2\cdot(11^{15})^2}=\sqrt{(2^5\cdot5^{10}\cdot11^{15})^2}=2^5\cdot5^{10}\cdot11^{15}$.

21 Calculați:

a $\sqrt{(-29)^2}$; b $\sqrt{(-29)^4}$; c $\sqrt{(-29)^8}$; d $\sqrt{(-19)^2}$;

e $\sqrt{(-51)^4}$; f $\sqrt{(-72)^2}$; g $\sqrt{(-2)^4}$; h $\sqrt{7^{42}}$;

i $\sqrt{2^{2000}}$; j $\sqrt{3^{2012}}$; k $\sqrt{(-6)^{2012}}$; l $\sqrt{(-7)^{7700}}$.

22 Folosind descompunerea în produs de puteri de factori primi, calculați:

a $\sqrt{576}$; b $\sqrt{625}$; c $\sqrt{324}$; d $\sqrt{400}$;

e $\sqrt{900}$; f $\sqrt{2025}$; g $\sqrt{3600}$; h $\sqrt{5625}$.

23 Folosind minicalculatorul, calculați:

a $\sqrt{6724}$; b $\sqrt{8281}$; c $\sqrt{20164}$; d $\sqrt{12100}$;

e $\sqrt{64516}$; f $\sqrt{84100}$; g $\sqrt{112896}$; h $\sqrt{164836}$.

24 Calculați:

a $\sqrt{25}+\sqrt{36}-\sqrt{49}$; b $\sqrt{100}\cdot\sqrt{16}-\sqrt{144}$;

c $3\cdot\sqrt{225}+12\sqrt{121}-\sqrt{169}$; d $5\sqrt{81}-\sqrt{64}\cdot\sqrt{196}+2\sqrt{100}$;

e $\sqrt{576}-\sqrt{625}+\sqrt{729}-\sqrt{841}+\sqrt{900}$; f $\sqrt{6400}-\sqrt{2025}+\sqrt{3364}-\sqrt{5184}-\sqrt{441}$.

25 Calculați:

a $\sqrt{2304}\cdot(\sqrt{225}-\sqrt{1225})+\sqrt{1600}$; b $\sqrt{5\cdot\sqrt{25}}+\sqrt{7\cdot\sqrt{49}}-\sqrt{9\cdot\sqrt{16}}$;

c $\sqrt{1+7\cdot\sqrt{25}}-\sqrt{11\cdot\sqrt{36}-2}+\sqrt{23\cdot\sqrt{9}+3\cdot\sqrt{16}}$; d $\sqrt{\sqrt{144}+13}+\sqrt{3\cdot\sqrt{324}+7\cdot\sqrt{225}-\sqrt{64}-7}$.

26 Calculați:

a $\sqrt{5^3\cdot5}$; b $\sqrt{7^4\cdot4}$; c $\sqrt{3^4\cdot5^2\cdot36}$;

d $\sqrt{144\cdot3^2\cdot64}$; e $\sqrt{21^2\cdot23^2}$; f $\sqrt{9^2-6^2+2^2}$;

g $\sqrt{64^2-63^2+4^2+1^2}$; h $\sqrt{2^6\cdot(7^2-2^4\cdot3)}$; i $\sqrt{5\cdot(9^2-6^2)}$.

27 Efectuați calculele:

a $\sqrt{2^2\cdot5+2^2\cdot11}$; b $\sqrt{7^4\cdot45+7^4\cdot39-7^4\cdot3}$; c $\sqrt{5^2\cdot11+19\cdot5^2+5^2\cdot6}$;

d $\sqrt{3^4\cdot19-3^4\cdot10}$; e $\sqrt{2^2\cdot3^4+2^2\cdot3^2+2^3\cdot3^3}$; f $\sqrt{2^4\cdot5^2+2^3\cdot5+1}$;

g $\sqrt{3^4+2\cdot3^2\cdot5^2+5^4}$; h $\sqrt{11^2-2\cdot11\cdot15+15^2}$; i $\sqrt{48^2-2\cdot48\cdot13+13^2}$.

28 Aflați x din relațiile:

a $\frac{x}{\sqrt{9}}=\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{36}}$; **b** $\frac{\sqrt{25}}{x}=\frac{16}{\sqrt{64}}$;

c $\frac{0{,}5\cdot\sqrt{4}}{2^3-2^2}=\frac{x}{3^3-3^2-2}$; **d** $\frac{\sqrt{700-5\sqrt{225}}}{\sqrt{180+\sqrt{2025}}}=\frac{3\sqrt{200+\sqrt{625}}}{x}$.

29 Determinați numerele naturale x care verifică egalitățile:

a $2^x=\sqrt{4}$; **b** $2^x=\sqrt{16}$; **c** $3^x=\sqrt{81}$; **d** $\sqrt{1+2+3+\ldots+8}=6^x$;

e $4^x=\sqrt{1+3+3\cdot4+3\cdot4^2+\ldots+3\cdot4^{51}}$; **f** $5^x=\sqrt{1+4+4\cdot5+4\cdot5^2+\ldots+4\cdot5^{2011}}$;

g $6^x=\sqrt{6^4-5\cdot6^3-5\cdot6^2-5\cdot6-5}$; **h** $3x=\sqrt{3^{2012}-2\cdot3^{2011}-2\cdot3^{2010}-\ldots-2\cdot3-2}$.

Aprofundare

30 Calculați:

a $\sqrt{972-3\cdot\sqrt{576}}+\sqrt{1255-11\cdot\sqrt{441}}$; **b** $\sqrt{3258+18\cdot\sqrt{361}}+\sqrt{5000+40\cdot\sqrt{1225}}$;

c $\sqrt{6525-15\cdot\sqrt{3600}}-\sqrt{905-20\cdot\sqrt{196}}$ **d** $\sqrt{673-12\cdot\sqrt{1024}}+\sqrt{891+11\cdot\sqrt{324}}$.

31 Există numere de forma $\overline{aa}$ care să fie pătrate perfecte?

32 Arătați că numărul $N=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot2011+3$ nu este pătrat perfect.

33 Arătați că următoarele numere sunt pătrate perfecte, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$:

a 2^{4n+2}; **b** 9^{n+1}; **c** 7^{6n}; **d** 15^{n^2+n}.

34 Se consideră numerele $A=\overline{ab}$ și $B=\overline{ba}$, unde a și b sunt cifre nenule.

a Scrieți toate numerele A care sunt pătrate perfecte;

b Scrieți cel mai mare număr A, pentru care $\sqrt{A+B}$ este număr natural.

35 Determinați cifrele a și b astfel încât numărul $\overline{aa}+\overline{bb}$ să fie pătrat perfect.

36 Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care numărul $x=\sqrt{\overline{ab}+\overline{ba}+4a+4b}$ este natural.

37 Determinați numărul natural $\overline{ab}$ pentru care numărul $x=\sqrt{\overline{ab}+2\cdot\overline{ba}+a-8b}$ este natural.

Probleme de șapte stele

38 Determinați numerele naturale de forma $A=\overline{46ab}$ și $B=\overline{2xyz}$, care sunt pătrate perfecte.

39 Fie n un număr natural nenul. Arătați că numărul $a=2+4+6+\ldots+2n$ nu este pătrat perfect.

40 Fie $x, y\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2009}$. Arătați că $\sqrt{\left(\frac{x}{41}-49\right)\left(\frac{y}{41}-49\right)}\in\mathbb{N}$.